

## NJË MODELIM MATEMATIK PËR NJEHSIMIN E REZISTENCËS DHE POLARIZUESHMËRIË SË DUKSHME

B. DUKA\*, N. LIKAJ\*\*

Potenciali i fushës elektrike, e krijuar nga burime çfarëdo në mjedisin gjysmë të pafundëm, në prani të një trupi me rezistencë të ndryshme nga mjedisi, mund të llogaritet në qoftë se njihet shpërndarja e potencialit në sipërfaqe të trupit. Kjo shpërndarje është gjetur duke zgjidhur numerikisht ekuacionin integral të Fredholmit. Algoritmi i hartuar llogarit rezistencën e dukshme për një model gjeometrik të dhënë dhe për një raport rezistencash  $Q_2/Q_1$  të njohur. Duke zbatuar këtë algoritëm dy herë (një herë për raportin  $Q_2/Q_1$  dhe një herë për atë  $Q_2^*/Q_1$ ) gjëndet polarizueshmëria e dukshme në rastin kur trupi ka edhe kontrast rezistencash edhe kontrast polarizueshmërie me mjedisin përreth.

\* Katedra e fizikës teorike, Fak. Shk. Nat. UT «Enver Hoxha».

\*\* Ndërmarrja gjeofizike — Tiranë.



# A MATHEMATICAL MODELLING OF APPARENT RESISTIVITY AND INDUCED POLARIZATION

## Abstract

The electric field of any source in halfinfinite medium, where one body with different resistivity from that of the medium is presented, can be calculated if the potential distribution on the body surface is known. This distribution is found by the numerical solution of the Fredholm's integral equation. The compiled algorithm calculates apparent resistivity for the given geometrical model and a known resistivity ratio  $\rho_2/\rho_1$ . The apparent induced polarization, in case of having resistivity and polarization contrast between body and surroundings, is calculated by using the algorithm twice (once for  $\rho_2/\rho_1$  ratio and once for  $\rho_2/\rho_1$  ratio).

## 1. Hyrje

Në vitet 70-80, metoda e elementeve të fundme është përdorur me sukses në shumë probleme të fizikës, gjeofizikës, inxhinierisë, etj., të cilat sillen në zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale me derivate të pjeshme. Të tilla janë edhe problemet e përhapjes së fushave elektrike dhe elektromagnetike në tokë.

Vitet e fundit, në probleme të tilla, ka filluar të përdoret një metodë e re, që çon në zgjidhjen e një ekuacioni integral.

Ne e kemi zbatuar këtë metodë të re në llogaritjen e anomalisë që i shkakton përhapjes së fushës elektrike të krijuar nga burime galvanike në tokë, prania e një trupi me kontrast rezistence dhe polarizueshmërie.

## 2. Rasti kur ka vetëm kontrast rezistencash

Trupi homogjen, izotrop, me rezistencë elektrike specifike  $\rho_2$ , me vëllim të fundëm  $V_2$  është vendosur në mjedisin homogjen izotrop me rezistencë elektrike specifike  $\rho_1$  dhe me vëllim gjysmë të pafundëm  $V_1$ , që kufizohet nga sipërfaqja e rrafshët T (kufiri Tokë-ajër) dhe nga sipërfaqja S e trupit (fig. 1).

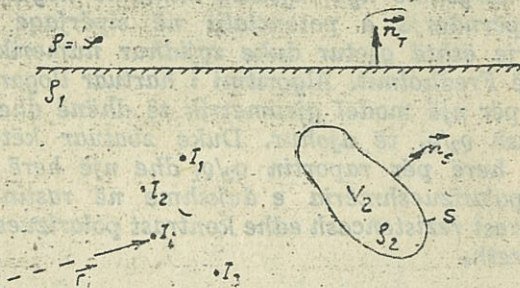


Fig. 1



Burimet pikësore galvanike me intensitete rryme  $I_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), janë vendosur në vëllimin  $V_1$ , në pikat me rreze-vektore  $\vec{r}_i$ .

Potenciali i fushës elektrike  $U_1$ , në vëllimin  $V_1$ , kënaq ekuacionin e Puasionit [4,5,6]:

$$\Delta U_1(\vec{r}) = -\rho_1 \cdot \sum_i I_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1)$$

ku  $\delta$  — funksioni i Dirakut. Ndërsa potenciali  $U_2$  në vëllimin  $V_2$ , kënaq ekuacionin e Laplasit:

$$\Delta U_2(\vec{r}) = 0 \quad (2)$$

Kushtet kufitare janë:

$$U_1 = U_2, \text{ në sipërfaqen } S \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial n_s} \right) = \frac{1}{\rho_2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial n_s} \right), \text{ në sipërfaqen } S \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n_T} = 0, \text{ në sipërfaqen } T \quad (5)$$

( $n$  — tregon drejtimin e pingules në sipërfaqe).

Funksioni i Grinit, për rastin e një burimi pikësor të vendosur në pikën  $\vec{r}_s$ , të mjedisit gjysmë të pafundëm, jepet [5, 6]:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_s|}, \quad (6)$$

ku  $\vec{r}'_s$  është pasqyrimi i pikës  $\vec{r}_s$  ndaj planit  $T$ . Ai kënaq ekuacionin:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_s) = -4\pi \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \quad (7)$$

me kusht kufitar:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_s)}{\partial n_s} = 0, \text{ në sipërfaqen } T. \quad (8)$$

Duke zbatuar identitetin e dytë të Grinit për funksionet  $U$  dhe  $G$ , pasi kryhen disa veprime të thjeshta [5], vijmë në ekuacionin e Fredholm-it të llojit të dytë:

$$U_1(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \int_S U(\vec{r}_s) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_s)}{\partial n_s} ds, \quad (9)$$

$$\text{ku } U_0(\vec{r}) = \frac{\rho_1}{4\pi} \sum_i I_i \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \right) \quad (10)$$

Pra, potenciali jepet si shumë e potencialit të fushës sikur të mos ishte

trupi  $[U_0(\vec{r})]$  dhe potencialit të fushës që krijojnë burimet fiktive të shpërndara në sipërfaqen e trupit.

Kur  $\vec{r}$  tenton tek  $\vec{r}$ , integrali në barazimin (9) paraqet singularitet. Duke veçuar termin singular, i cili del [6]:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) U(\vec{r}_s), \text{ gjejmë ekuacionin integral:}$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) U(\vec{r}_s) - \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \iint_{s'} U(\vec{r}_s) \cdot \frac{\partial G(\vec{r}_s, \vec{r}_s)}{\partial n_s} ds' = U_0(\vec{r}_s) \quad (11)$$

ku integrimi kryhet në sipërfaqen e trupit përjashtuar pikën singulare

$$\vec{r}'_s = \vec{r}_s$$

Nga ky ekuacion gjëndet shpërndarja e potencialit  $U(\vec{r}_s)$  në sipërfaqe të trupit. Pastaj mund të gjëndet potenciali  $U_1(\vec{r})$  në çdo pikë të vëllimit  $V_1$  (pra edhe në sipërfaqe të tokës, ku kryhen matjet elektrometrike) me anë të barazimit (9).

Zakonisht, në praktikën gjeofizike, përcaktohet e ashtuquajtura rezistencë e dukshme [1]:

$$\rho_d = k \frac{\Delta U}{I}, \quad (12)$$

ku  $\Delta U$  — diferenca e potencialit midis elektrodave marrëse dhe k-koefficienti gjeometrik i skemës [1].

### 3. Rasti kur ka kontrast rezistence dhe polarizueshmërie

Në qoftë se trupi me rezistencë elektrike specifike  $\rho_2$  ka edhe polarizueshmëri  $[1]; \eta_2$ ; kurse mjedisi me rezistencë  $\rho_1$  ka edhe polarizueshmëri  $\eta_1$ , potenciali i fushës elektrike kënaq përsëri po ato ekuacione (1) dhe (2), me kushte kufitare: (3) dhe kushtin e ngjashëm me (4) [1]:

$$\frac{1}{\rho_1^*} \left( \frac{\partial U_1}{\partial n_s} \right) = \frac{1}{\rho_2^*} \left( \frac{\partial U_2}{\partial n_s} \right) \text{ në sipërfaqen } S, \quad (13)$$



$$\text{ku } \frac{1}{\rho_1^*} = \frac{1}{\rho_1} (1 - \eta_1), \quad \frac{1}{\rho_2^*} = \frac{1}{\rho_2} (1 - \eta_2) \quad (14)$$

Prandaj, zgjidhja e problemit bëhet me po ato ekuacione si në rastin kur kishte vetëm kontrast rezistencash, duke vendosur në vënd të  $\rho$ ,  $\rho^*$ .

Në praktikën gjeofizike përcaktohet e ashtuquajtura polarizueshmëri e dukshme [1]:

$$\eta_d = \frac{\Delta U_{pp}}{\Delta U} \quad (15)$$

ku  $\Delta U_{pp} = \Delta U - \Delta U_0$  — është diferenca e potencialit në elektrodën marrëse, që lind nga polarizimi i provokuar;

$\Delta U_0$  — diferenca e potencialit që shkakton fusha parësore, e cila ka kushtet kufitare (3), (4), (5) dhe  $\Delta U$  — diferenca e potencialeve të fushës rezultante, e cila ka kushtet kufitare (3), (5), (13).

Nga barazimi:

$$\eta_d = 1 - \frac{\Delta U_0}{\Delta U} \quad (16)$$

dhe nga shprehjet:

$$\rho_d = k \cdot \frac{\Delta U_0}{I}, \quad \rho'_d = k \cdot \frac{\Delta U}{I} \quad (17)$$

gjejmë:

$$\eta_d = 1 - \frac{\rho_d}{\rho'_d} \quad (18)$$

#### 4) Disa vërejtje për algoritmin

Për zgjidhjen e ekuacionit integral të Fredholm-it të llojit të dytë, me metoda numerike, e kemi ndarë sipërfaqen e trupit në nënsipërfaqe elementare, ku në secilën prej tyre potenciali i kërkuar supozohet konstant. Atëherë, ekuacioni (11) sillet në një sistem ekuacionesh algjebri-ke lineare:

$$\left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) - \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \mathbf{P}'(i) \right] U(i) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq i} U(k) \mathbf{P}(i, k) = U_0(i) \quad (19)$$

ku indekset  $i, k$  tregojnë numrin e nënsipërfaqes. Koeficientët,  $P(i, k)$  dhe  $P(i)$  llogariten analitikisht me integralet përgjatë sipërfaqeve përkatëse:

$$P(i, k) = \iint_{S_k} \frac{\partial}{\partial n_{s_k}} \left( \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} + \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_k|} \right) dS_k \quad (20)$$

$$P'(i) = \iint_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_{s_i}} \left( \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_i|} \right) ds_i \quad (21)$$

Sa më i madh të jetë numri i nënsipërfaqeve, aq më e saktë është zgjidhja. Por, shtimi i këtij numri do të thotë shtim i numrit të ekuacioneve të sistemit (19), që është i kufizuar nga kapaciteti i kujtesës së ordinatorit në përdorim dhe nga zgjatja e kohës së llogaritjeve.

Nga zgjidhja numerike e sistemit (19) gjenden potencialet  $U(i)$  në meset e nënsipërfaqeve dhe nga zgjidhja numerike e ekuacionit (9):

$$\vec{U}_1(\vec{r}_i) = \vec{U}_0(\vec{r}_i) + \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \sum_i U(i) \cdot P(j, i) \quad (22)$$

gjëndet potenciali në çdo pikë  $\vec{r}_i$ . Më tej llogariten  $Q_d$  e  $\eta_d$  me formulat (12) e (18).

Algoritmi u ndërtua për trupa me formë romboedrike (me 6 faqe në formë paralelogramesh, dy e nga dy paralele me njëra tjetrën). Duke dhënë koordinatat e njërit kulm të trupit dhe drejtimet e tri brinjëve gjenerohen pozicionet e çdo kulmi dhe faqeje. Çdo çift faqesh është ndarë në aq nënsipërfaqe sa që rezultatet e llogaritjes së  $Q_d$  dhe  $\eta_d$  të konvergjojnë (d.m.th. të mos ndryshojnë më rritjen e numrit të ndarjeve). Integralet (20) e (21) u llogariten analitikisht në çdo nënsipërfaqe  $S_k$  duke

fiksuar  $\vec{r}_i$  në meset e faqeve të tjera ( $i \neq k$ ).

Në eksperimentuam dy metoda numerike për zgjidhjen e sistemit (19), që japin rezultatet të kënaqshme kur matrica e sistemit është me diagonale thujse determinuese siç është edhe matrica e sistemit (19). Në metodën e parë (iterative) u shfrytëzua algoritmi i Gaus — Zeidelit [3]. Me që kujtesa operative e mikroordinatorit, (Apple II<sup>e</sup>), që përdorëm, është e kufizuar (92 k.bajt), matrica e sistemit u konceptua e ndarë në një numër minimal pjesësh, të cilat pasi gjenerohen, rezervohen në kujtesën periferike dhe gjatë çdo iteracioni ato thirren në mënyrë të njëpasnjëshme. Për të minimizuar kohën e rezervimit dhe kapjes së informacionit në kujtesën periferike, leximi dhe rregjistrimi në të u realizua në formën e një skedari binar. Me këtë metodë u arrit të zgjidhej sistemi (19) deri në 150 ekuacione.

Në metodën e dytë u përdor algoritmi Gaus-Zhordan [3], i cili u modifikua me qëllim që të minimizohej kujtesa e nevojshme në mikroordinator për matricën e sistemit. Rreshtat e matricës gjenerohen dhe trajtohen radhazi duke bërë zero elementet poshtë dhe sipër diagonales kryesore. Vëndet e zerove nuk rezervohen në kujtesë dhe ndërkohë matrica është e linearizuar në një vektor. Kjo krijoi mundësi që të shkur-



tohej kujtesa e nevojshme me 4 herë [2]. Me këtë metodë u arrit të zgjidhej sistemi me deri në 184 ekuacione. Me të dyja metodat u muarën rezultate praktikisht të njëjta.

Me që kërkohen rezultate të llogaritjeve për kontraste rezistencash  $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$  të ndryshme, kur koeficientët  $P(i, k)$ , që shprehin marrëdhëniet gjeometrike midis nënsipërfaqeve nuk ndryshojnë, e rishkruajmë sistemin (19) në formën:

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) - \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + P'(i) \cdot U(i) + \sum_{k \neq i} U(k) P(i, k) = \frac{U_0(i)}{\frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)} \quad (23)$$

Në të, vihet re se vetëm elementet e diagonales kryesore të matricës të sistemit varen nga kontrasti i rezistencave. Matrica e sistemit mund të llogaritet vetëm një herë dhe të ruhet në kujtesën periferike të mikroordinatorit, me qëllim që të përdoret për të njëjtin model gjeometrik, me kontraste rezistencash  $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$  të ndryshme.

Gjithashtu, kërkohen rezultate për skema të ndryshme ushqimi: [Ne kemi zgjedhur skemën me dy elektroda ushqyese (+I, -I) në sipërfaqe të Tokës, me largësi AB midis tyre]. Me që potenciali parësor  $U_0$  hyn vetëm në anën e djathtë të sistemit (23), algoritmi u ndërtua në mënyrë që të japë zgjidhje njëkohësisht për 10 skema ushqimi me AB të ndryshme. Kjo e rrit rendimentin e llogaritjeve, mbasi kohën më të madhe të llogaritjeve e zë llogaritja e elementeve të matricës dhe procesi i diagonalizimit të matricës.

## 5. Disa shembuj të rezultateve të llogaritjeve

Sipas algoritmit të mësipërm u hartua programi PRIZC, në gjuhën Basic, për mikroordinatorin APPLE II-e. Programi llogarit polarizueshmërinë e dukshme  $\eta_d$  dhe (ose) rezistencën e dukshme  $\varrho_d$ , për një trup romboedrik me pozicion të çfarëdoshëm ndaj disa skemave të ushqimit.

Për ilustrim grafik (figurat 2 — 6) trupin e kemi zgjedhur në formën e paralelopipedit këndrejtë me përmasa 20 m x 200 m x 100 m dhe me parametra  $\varrho_2 = 0,5 \Omega \text{ m}$ ,  $\eta_2 = 0,7$ . Ai është vendosur në mjedisin gjysmë të pafundëm me parametra  $\varrho_1 = 1 \Omega \text{ m}$ ,  $\eta_1 = 0,02$ , në dy pozicione: vertikal (fig. 2) dhe i pjerrur me  $45^\circ$  (fig. 4) ndaj horizontit. Trupi ndodhet në mesin e skemës së ushqimit, për secilën nga 6 skemat ( $AB = 200, 400, 600, 800, 1000, 2000 \text{ m}$ ; largësia midis elektrodave marrëse  $MN = 5 \text{ m}$ ).

Llogaritjet e  $\eta_d$  dhe  $\varrho_d$  janë kryer për profilin qendror (në sipërfaqe të Tokës), që kalon pingul me shtrirjen e trupit në mesin e tij, me hap 10 m për skemën e parë ( $AB = 200 \text{ m}$ ) dhe me hap 20 m për skemat e tjera.

Në fig. 2 dhe 3 janë paraqitur grafikët e  $\eta_d$  dhe  $\rho_d$  vetëm për tre skema. Siç duket, grafikët janë simetrikë me një ekstremum të madh mbi kreun e trupit dhe me dy ekstremume anësore më të vegjël. Të tre ekstremumet rriten me hapjen (zgjerimin) e skemës. Kjo rritje është e dukshme kur kalojmë nga skema  $AB = 200$  m në skemën  $AB = 400$  m dhe më pak e dukshme në skemat me  $AB > 400$  m. (Për këtë arsye nuk janë paraqitur grafikët për skemat  $AB = 600, 800, 1000$  m). Maksimumi i grafikut për  $\eta_d$  është afro 0,100, d.m.th. rreth 7 herë më i vogël se polarizueshmëria e trupit. Në këtë rezultat ndikon jo vetëm vendosja gjeometrike e trupit në lidhje me skemën (shih fig. 6), por, siç dihet, edhe kontrasti i rezistencave.

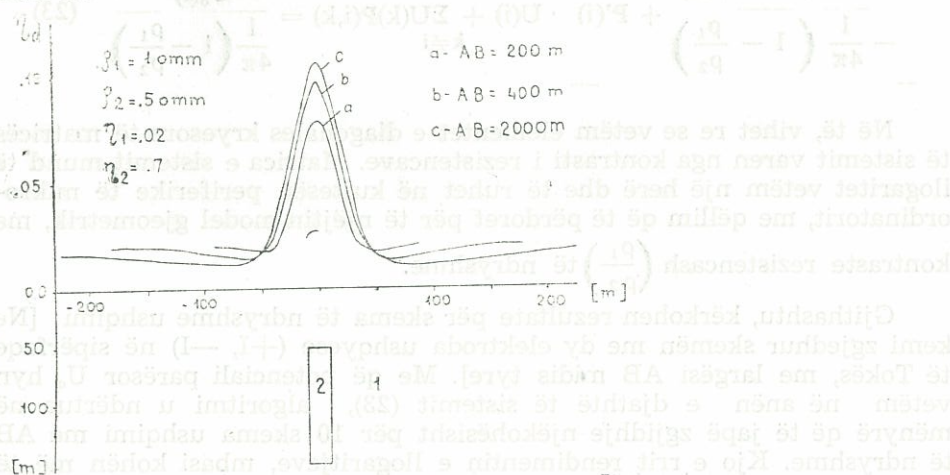


Fig. 2

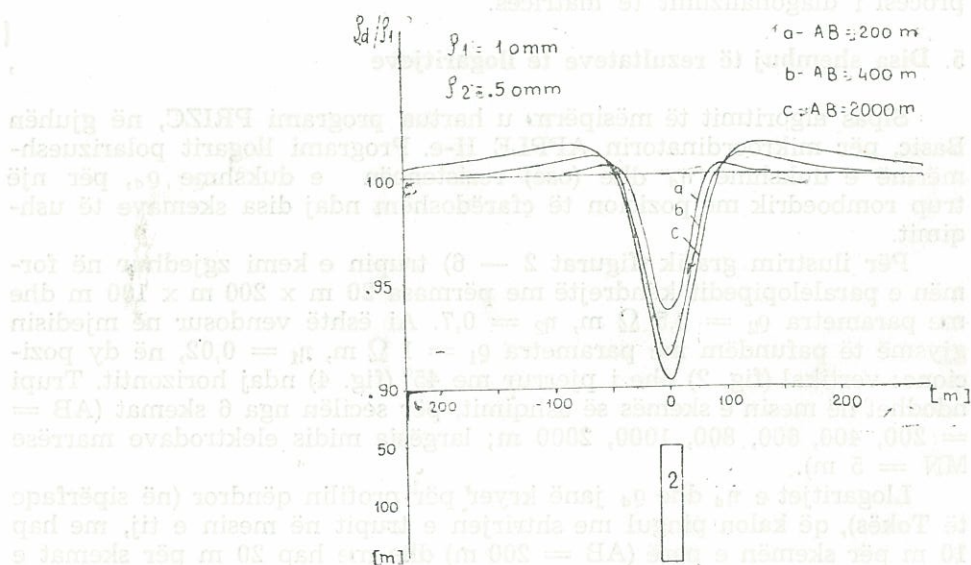


Fig. 3



Në fig. 4 dhe 5 janë paraqitur grafikët e  $\eta_d$  për trupin, e pjerrtur, me  $45^\circ$  ndaj horizontit, për të njëjtat skema si më lart. Grafikët janë jo simetrikë, me dy ekstremume në anë të ndryshme të kulmit të sipërm të trupit; më i madhi është në anën e rënies së trupit. Siç vihet re nga fig. 5, pozicioni i kulmit të sipërm të trupit përkon afërsisht me pikën e infleksionit të grafikut të  $\eta_d$  (aq më saktësisht, sa më e madhe të jetë skema e ushqimit).

Me këtë program mund të llogariten anomalitë e  $Q_d$  dhe  $\eta_d$  për modele të shumëllojshme me parametra fizikë e gjeometrikë të ndryshëm, gjë që ndihmon shumë në interpretimin e vrojtimeve fushore të anomalive me metodën e rezistencës dhe polarizimit të provokuar.

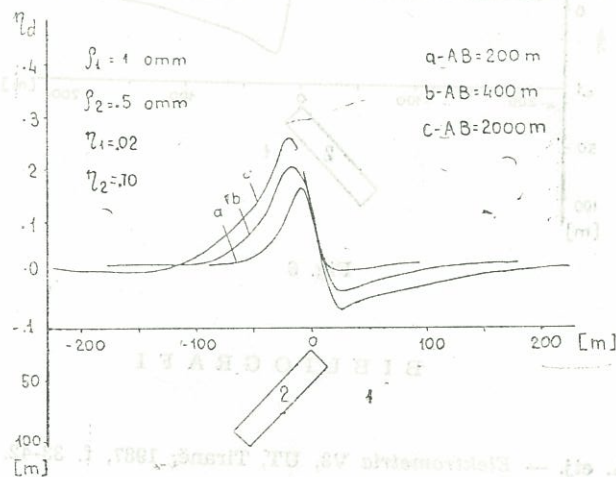


Fig. 4

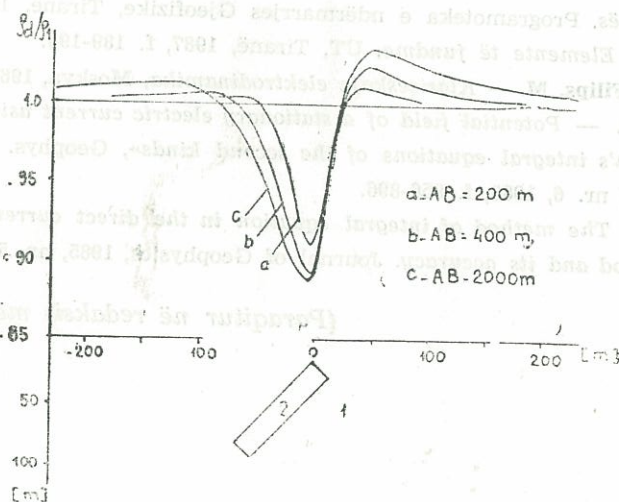


Fig. 5

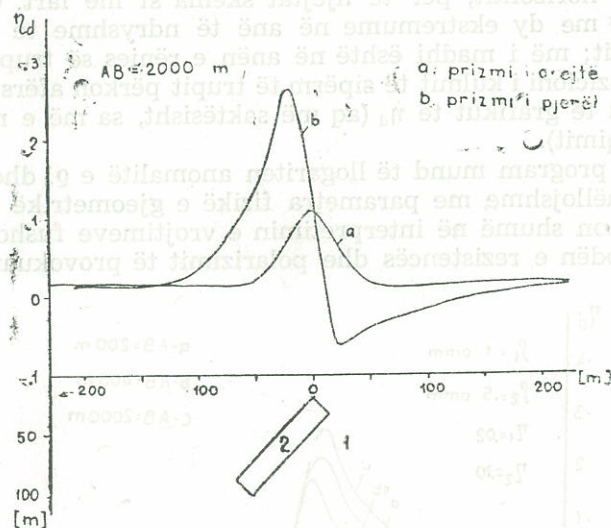


Fig. 6

## BIBLIOGRAFI

- [1] Frashëri, A. etj. — *Elektrometria V3*, UT, Tiranë, 1987, f. 33-42.
- [2] Likaj, N. — Programi «Gaus-diag» — program për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me metodën Gaus — Zhordan, me optimizim të kujtesës. Programoteka e ndërmarrjes Gjeofizike, Tiranë, 1988.
- [3] Osmani, S. — *Elemente të fundme*, UT, Tiranë, 1987, f. 189-193.
- [4] Panovski, V., Filipi, M. — *Klasikëska elektrokinamika*, Moskva, 1963, f. 55-57.
- [5] Eloranta, E.H. — Potential field of a stationary electric current using Fredholm's integral equations of the second kinds», *Geophys. Prospecting*, v. 34, nr. 6, 1986, f. 856-896.
- [6] Schulz, R. — The method of integral equation in the direct current resistivity method and its accuracy. *Journal of Geophysics*, 1985, nr. 56, f. 192-200.

(Paraqitur në redaksi, më 20.2.1989)