MF

MATEMATIKA dhe FIZIKA në shkollë

5

SHTËPIA BOTUESE E LIBRIT SHKOLLOR

TIRANË, 1980

REZONANCA PARAMETRIKE

Të gjithë e kemi provuar, kur kemi qenë fëmijë se duke u ulur dhe ngritur në shilarës, pasi na kanë shtyrë pak, mund të rrisim vetë amplitudën e lëkundjeve të shilarsit. Si shpjegohet kjo dukuri?

Kuptohet se këtu, kemi të bëjmë me një dukuri rezonance. Në të vërtetë ndryshon pak nga ajo rezonancë që mësohet në shkollën e mesme. Në rezonancën e thjeshtë amplituda e lëkundjeve merr vlerë maksimale, kur frekuenca e forcës detyronjëse bëhet e barabartë me frekuencën e lëkundjes vetjake të trupit.

Ndërsa dukuria që përshkruam hyn në rezonancën parametrike. Në rezonancën e thjeshtë ndryshojmë periodikisht forcën e jashtme, ndërsa në rezonancën parametrike ndryshon periodikisht një nga parametrat e lëkundjes. Këta parametra janë koeficientë që karakterizojnë sistemin që lëkundet dhe përcaktojnë periodën e lëkundjeve.

Në lavjerrësin matematik p.sh. perioda jepet:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

ku l është gjatësia e lavjerrësit dhe g është nxitimi i rënies së lirë (fig.19). Të dy këto madhësi quhen parametra të lëkundjes. Këto madhësi gjatë lëkundjeve të lira (pa ndërhyrje nga jashtë) nuk ndryshojnë. Në këtë kuptim edhe energjinë e sistemit që lëkundet e konsiderojmë parametër të lëkundjes. Kur vepron forca e jashtme periodike, ky parametër ndryshon

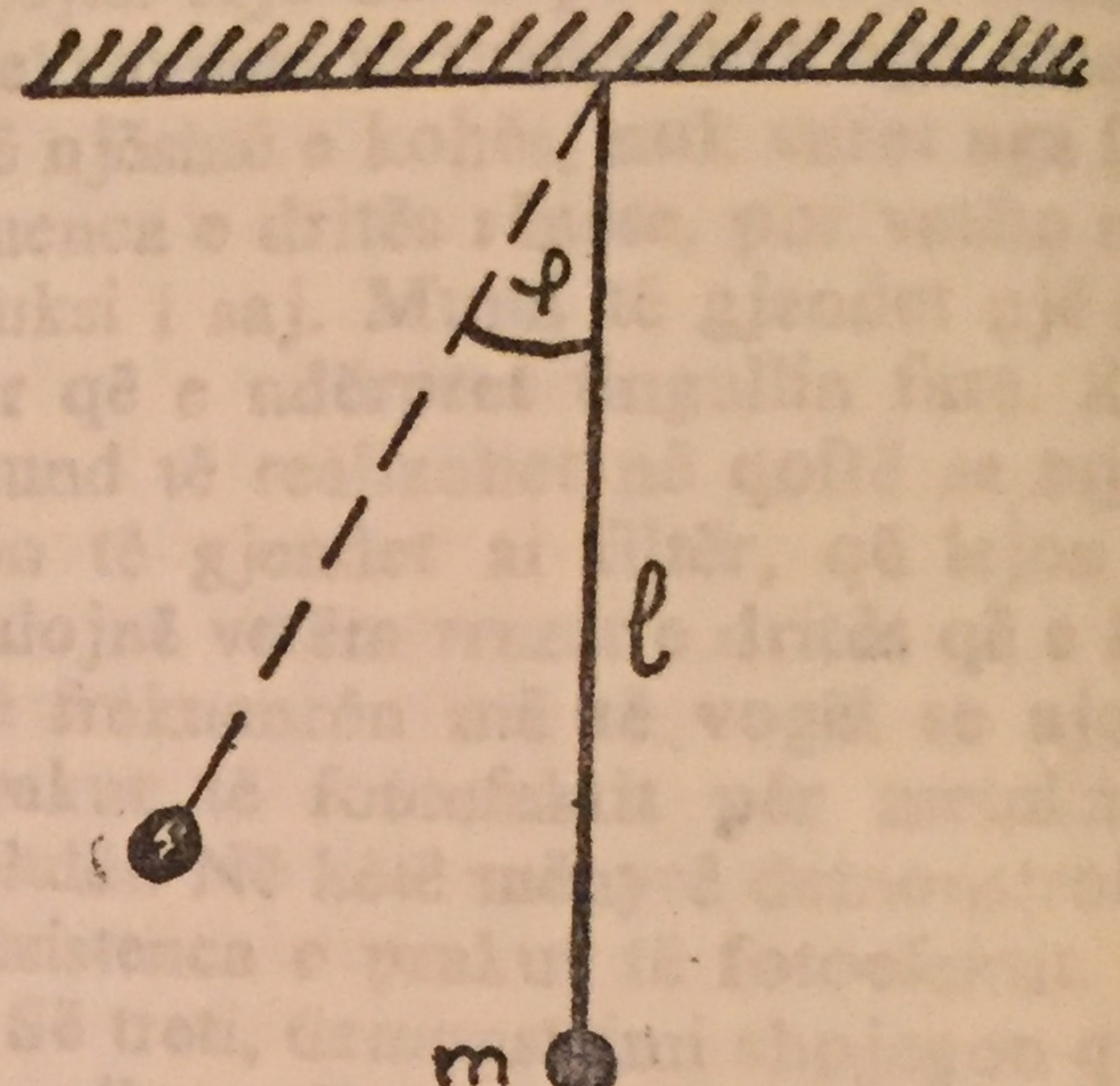

Fig. 19

periodikisht dhe në qoftë se frekuenca e forcës detyronjëse është e barabartë me frekuencën vetjake të lëkundjeve $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$, atëherë gjat një periode i japim trupit dy herë energji (kur kalon në pozicionin e ekuilibrit). Pra, frekuenca e ndryshimit të këtij parametri (energjisë) është dy herë më e madhe se frekuenca vetjake. Në rezonancën parametrike, frekuenca e ndryshimit të madhësisë së parametrit duhet të jetë sa dyfishi i frekuencës vetjake $\omega = 2\omega_0$. Llogaritjet matematike tregojnë që ka rezonancë edhe kur frekuenca e ndryshimit të parametrit është $\omega = \omega_0$, $\omega = \frac{2}{3}\omega_0$; $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$ etj., por rezonanca është më e dukshme për $\omega = 2\omega_0$.

Kështu veprojmë në shilarës që ngrihemi sa herë që ai ndodhet në pozicionin më të largët dhe ulemi kur kalojmë në pozicionin e ekuilibrit. Në këtë mënyrë ne ndryshojmë pozicionin e qendrës së rëndesës, pra parametrin l të formulës (1)[1]. Frekuenca e këtij ndryshimi është dy herë më e madhe se frekuenca vetjake e sistemit (gjatë një periode kalojmë dy herë në pozicionin më të largët dhe dy herë në pozicionin e ekuilibrit).

Le të nxjerrim këtë përfundim edhe matematikisht.

Supozojmë që gjatësia e lavjerrësit (pra pozicioni i qendrës së rëndesës së njeriut) ndryshon periodikisht sipas ligjit harmonik:

$$l = l_0 + a\,|\sin\omega t| \qquad (2)$$

ku vlera absolute e funksionit trigonometrik $\sin\omega t$ është funksion periodik me frekuencë 2ω (fig. 20).

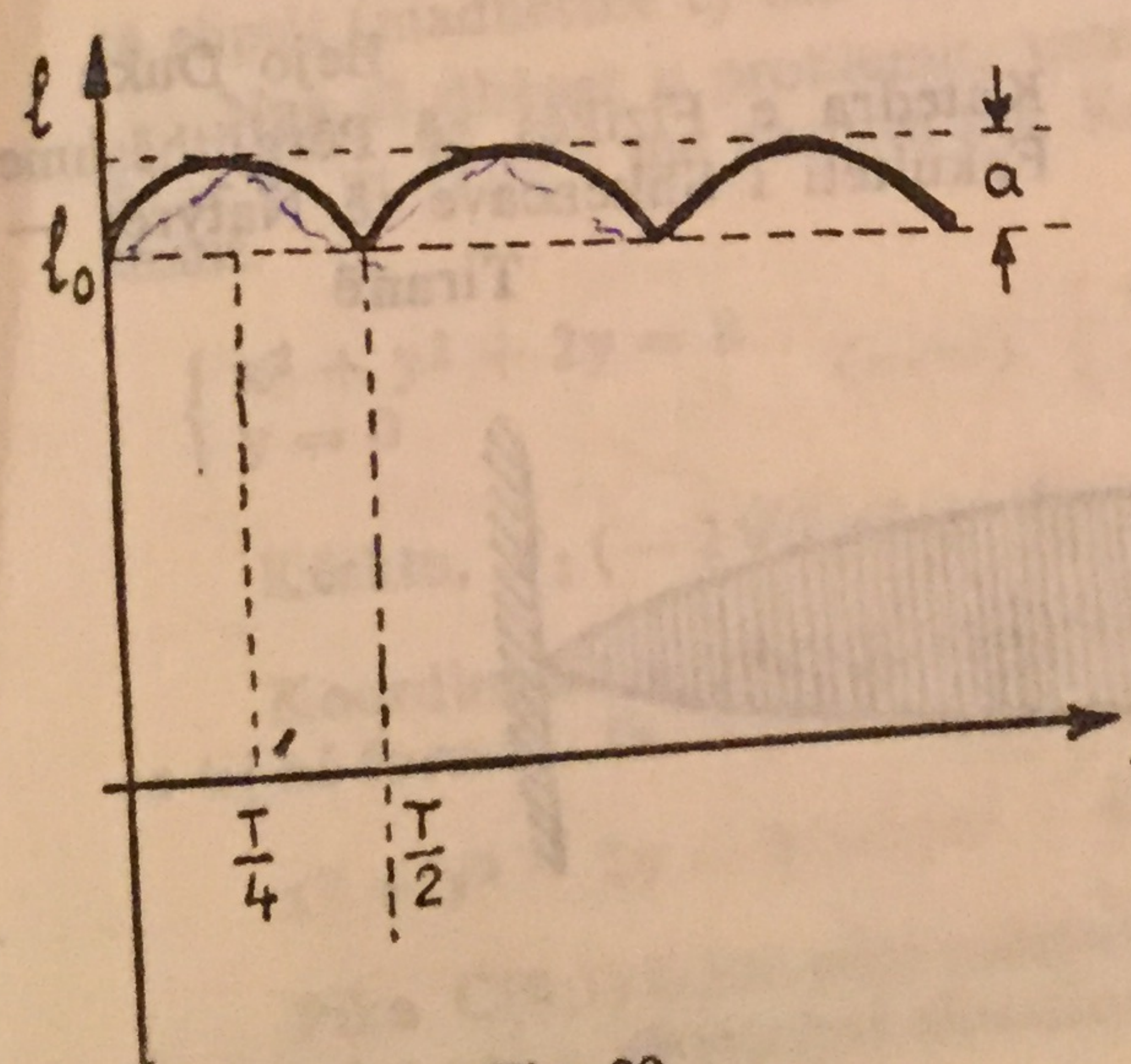

Fig. 20

Për $t = 0$ njeriu ndodhet në pozicionin e ekuilibrit dhe ka shpejtësi, ai është i mbledhur ($l = l_0$) pastaj fillon e ngrihet, në $t = \frac{T}{4}$, kur kalon në pozicionin më të largët ai është ngritur në këmbë ($l = l_0 + a$). Do të konsiderojmë a shumë më të vogël se l_0. Pas $t = \frac{T}{2}$ njeriu është përsëri në pozicionin e ekuilibrit dhe është ulur përsëri ($l = l_0$) etj.

Kështu, duke harxhuar energji të brendshme, me anë të muskujve, njeriu kryen punë mekanike, e cila i shkon sistemit që lëkundet. Le të llogarisim punën që kryhet gjatë një periode:

Dihet që në lëkundjet e lira këndi ndryshon sipas ligjit:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t \qquad (3)$$

Gjatë ngritjes dhe uljes njeriu duhet të kryej punë kundër forcës së rëndesës dhe kundër forcës centripete. Puna e parë do të ishte: $A_1 = 4m.ga$ (për kënde të vegjël $\cos\varphi \approx 1$).

$A_2 = 4\int_0^{T/4} \frac{mv^2}{l}\cdot dl$, duke vendosur

$v = \frac{d\varphi}{dt}\cdot l = -\varphi_0 l\omega\sin\omega t$, për

$t\left(0, \frac{T}{2}\right)$, $l = l_0 + a\sin\omega t$ dhe

$dl = a\omega\cos\omega t\, dt$ kemi:

$$A_2 = 4\int_0^{T/4} m\,\varphi_0^2\,\omega^3\,(l_0 + a\sin\omega t)\; a\sin^2\omega t\cdot\cos\omega t\, dt.$$

Duke zgjidhur këtë integral, arrijmë:

$A_2 = 4m\varphi_0^2\omega^2\left(\frac{al_0}{3} + \frac{a^2}{4}\right)$, duke ?

zëvendësuar $\omega^2 = \frac{g}{l_0}$ marrim:

$$A_2 = \frac{4m\varphi_0^2 a\cdot g}{3} + mg\frac{\varphi_0^2 a^2}{l_0};$$

1) Ne e thjeshtojmë problemin duke konsideruar njeriun që lëkundet në shilarës si një lavjerrës matematik.

$$A=A_1+A_2=4mga\left(1+\frac{1}{3}\varphi_0^2\right)+\frac{a^2}{l_0^2}\cdot\frac{mgl_0\,\varphi_0^2}{2}$$

Shprehja $E = mg\,\frac{l_0\,\varphi_0^2}{2}$ jep energjinë e sistemit, që lëkundet lirisht. Pra, puna është proporcionale me energjinë vetjake të sistemit:

$$A = mg\,\frac{l_0\,\varphi_0^2}{2}\left(8\,\frac{a}{l_0\,\varphi_0^2}+\frac{8}{3}\,\frac{a}{l_0}+\frac{a^2}{l_0^2}\right)=C_1E$$

ku $C_1 = \frac{8a}{l_0\,\varphi_0^2}+\frac{8}{3}\,\frac{a}{l_0}+\frac{a^2}{l_0^2}$

Puna që kryhet në njësinë e kohës është:

$\frac{A}{t}=\frac{C_1E}{T}=\frac{C_1}{T}\cdot E$, ku T është perioda vetjake. Kjo madhësi jep edhe ndryshimin e energjisë në njësinë e kohës.

Pra $\frac{dE}{dt}=\frac{C_1}{T}\cdot E=C_2E.$

Zgjidhja e këtij ekuacioni diferencial është:

$$E = E_0\, e^{C_2 t}$$

Meqenëse $C_2 > 0$ energjia e sistemit rritet me kohën, sipas një funksioni eksponencial, pra amplituda e lëkundjeve rritet shumë.

Është për t'u shënuar se rezonanca parametrike nuk arrihet në qoftë se sistemi nuk është nxjerrur nga ekuilibri me një ngacmim të jashtëm ($E_0 = 0$).

Për ta ilustruar dukurinë e rezonancës parametrike, mund të realizojmë në laborator një eksperiment të tillë: Marrim një tel të fiksuar në njërin skaj dhe skajin tjetër e lidhim me një diapazon (fig. 21). Teli është i tendosur me një tension P (parametër), nga i cili varet frekuenca e lëkundjeve vetjake të telit. Perioda jepet:

$$T=\frac{2l}{k}\sqrt{\frac{\mu}{P}}\quad \text{ku } k = 1,2\ldots.$$

μ — masa e njësisë së gjatësisë telit,
l — gjatësia e telit.

Në qoftë se diapazonin e godasim, atëherë tensioni i telit ndryshon periodikisht. Kur frekuenca e lëkundjeve të diapazonit bëhet ≈ 2 herë frekuencën vetjake të telit, atëherë ngacmohen lëkundje maksimale që duken me sy.

Bejo Duka
Katedra e Fizikës së Përgjithshme
Fakulteti i Shkencave të Natyrës — Tiranë

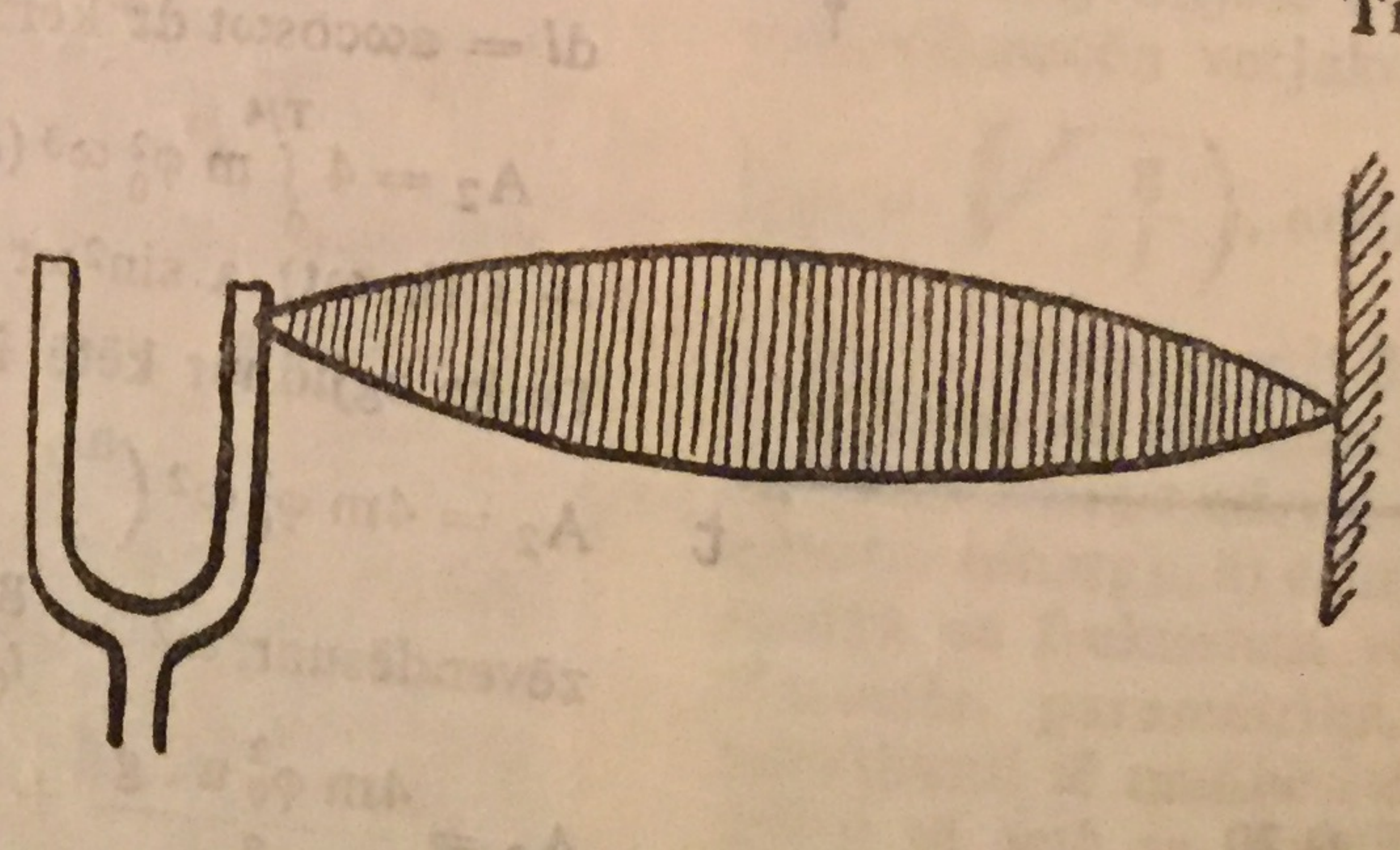

Fig. 21.